

تخمین مسیر رشد ترک در مواد سنگی تحت اثر بارگذاری مرکب I/II

جواد اکبر دوست^{۱*}؛ امیر راستین^۲

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی

۲ - دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی

پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲

دریافت: ۱۳۹۵/۰۱

چکیده

تخمین مسیر رشد ترک در توده‌های سنگی، یکی از موضوعات مهم در بسیاری از پروژه‌های معدنی و عمرانی همانند شکست هیدرولیکی، حفاری معادن، ساختن تونل و غیره می‌باشد. تخمین مسیر رشد ترک عموماً از دو منظر مورد توجه قرار می‌گیرد: اولاً تخمین مسیر رشد ترک برای جلوگیری از پیشروی آن، و ثانیاً کنترل رشد ترک در راستای مطلوب برای سهولت در شکست توده‌های سنگی. برای این منظور، باید روشی مناسب جهت تخمین هرچه دقیق‌تر مسیر رشد ترک ارائه نمود. هدف از این مقاله، بیان روشی ساده ولی با دقت مناسب برای تخمین مسیر رشد ترک در قطعات سنگی ترک‌دار تحت بارگذاری مرکب می‌باشد. روش پیشنهادی، یک روش گام به گام است که در هر مرحله زاویه‌ی شروع شکست بر مبنای معیار بیشینه تنش محیطی با در نظر گرفتن اثرات جملات مرتبه بالاتر، محاسبه می‌شود. در انتها، روش پیشنهادی توسط نتایج آزمایشگاهی که در مقالات قبلی گزارش شده است، ارزیابی می‌گردد تا صحت و دقت آن بررسی شود. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که چنانچه از سه جمله‌ی بسط سری ویلیامز برای محاسبه‌ی زاویه شروع شکست در هر مرحله استفاده شود، روش پیشنهادی می‌تواند با دقت خوبی مسیر رشد ترک قطعات سنگی را پیش‌بینی کند.

کلمات کلیدی

مسیر رشد ترک، مواد سنگی، معیار بیشینه تنش محیطی، جملات مرتبه بالاتر، روش گام به گام

مقدمه

به دلیل ساختار متخلخل سنگ‌ها، احتمال حضور ترک در آن‌ها زیاد بوده و لذا قطعات سنگی دارای مقاومت نسبتاً کمی در مقابل بارهای مکانیکی می‌باشند. بنابراین، بررسی شکست قطعات ترک‌دار در مواد سنگی از اهمیت ویژه‌ای برای مهندسی عمران و معدن برخوردار است. یکی از موضوعات مهم در بررسی شکست قطعات سنگی ترک‌دار، تخمین مسیر رشد ترک در آن‌ها می‌باشد. این موضوع از دو جنبه حائز اهمیت است: اولاً با دانستن مسیر رشد ترک، می‌توان توسط راهکارهای مناسب از رشد آن جلوگیری نمود و تخریب توده‌های سنگی را به تعویق انداخت. ثانیاً در برخی موارد (همانند شکست هیدرولیکی) باید مسیر رشد ترک را کنترل نمود تا بتوان مواد معدنی و یا مواد نفتی را آسان‌تر به دست آورد. برای تخمین مسیر رشد ترک می‌توان، از مبانی و مفاهیم علم مکانیک شکست که یکی از شاخه‌های علوم مهندسی مکانیک است، استفاده کرد. علم مکانیک شکست به بررسی قطعات ترک‌دار تحت بارگذاری‌های مختلف می‌پردازد و به صورت متناوب توسط مهندسی معدن و عمران برای بررسی شکست مواد سنگی، مورد استفاده قرار گرفته است [۴،۱].

از سویی دیگر، پدایش ترک در یک قطعه معمولاً در جهات مختلف می‌باشد و ممکن است ترک نسبت به راستای بارگذاری دارای زوایای مختلفی باشد. در صورتی که جهت بارگذاری و ترک نسبت به هم به گونه‌ای باشند که صفحات ترک بدون هیچ لغزشی نسبت به یکدیگر، باز شوند، اصطلاحاً گفته می‌شود، حالت مود I خالص اتفاق افتاده است و در صورتی که صفحات ترک نسبت به یکدیگر لغزش بدون باز شدگی داشته باشند، حالت مود II خالص رخ می‌دهد. اگر شرایط به گونه‌ای باشد که لبه‌های ترک علاوه بر باز شدن، روی هم نیز بلغزند، اصطلاحاً به این حالت مود ترکیبی I/II گفته می‌شود. در حالت بارگذاری مود I به دلیل بارگذاری متقارن، عموماً ترک در راستای خودش رشد می‌کند و تا انتهای قطعه پیش می‌رود. اما در حالت بارگذاری مرکب و یا مود II خالص،

مسیر رشد ترک، از راستای ترک اولیه منحرف شده و یک مسیر منحنی‌شکل را تا شکست نهایی قطعه طی می‌کند. پرواضح است که مسأله اصلی محققین تخمین مسیر رشد ترک در حالت بارگذاری مرکب بوده و در حالت بارگذاری مود I به جز مواردی خاص، در بقیه موارد مسیر رشد ترک قابل پیش‌بینی است.

تاکنون پژوهشگران بسیاری به بررسی مسیر رشد ترک از منظر مکانیک شکست پرداخته‌اند. در بین روش‌های مورد استفاده‌ی محققین سه روش بیشتر مورد توجه قرار گرفته است: روش اول استفاده از المان چسبناک^۱ می‌باشد. در این روش، از یک سری المان‌های خاص که مدل ساختاری آن‌ها بر اساس مدل ناحیه چسبناک^۲ می‌باشد، استفاده شده است. مکانیزم عملکردی این المان‌ها به این صورت می‌باشد که با آغاز تخریب، این المان‌ها وارد مجموعه محاسباتی می‌شوند و پس از اتمام مرحله تخریب، از مجموعه محاسباتی حذف شده و یک ترک جدید در قطعه ایجاد می‌کنند. البته باید در نظر داشت که یک سفتی مجازی برای این دسته از المان‌ها در سیستم محاسباتی مسأله، از ابتدا وجود دارد. عیب اصلی این روش، دانستن مسیر رشد ترک در ابتدای کار است. به عبارت دیگر، باید محدوده‌ای از مسیر رشد ترک را در ابتدای کار دانست و سپس از المان‌های چسبناک در این محدوده استفاده کرد. روش دوم، روش المان محدود توسعه یافته^۳ (XFEM) می‌باشد که در این روش، یک معیار تخریب بر اساس مدل ناحیه چسبناک، برای تمامی المان‌های مسأله تعریف می‌شود و با رسیدن هر المان به شرایط آسیب، آن المان به دو قسمت تقسیم می‌گردد. این امر باعث ایجاد ترک جدید در قطعه می‌شود و رشد ترک تا شکست نهایی قطعه ادامه پیدا می‌کند. محاسبه‌ی پارامترهای مربوط به مدل‌های آسیب به خصوص مدل ناحیه چسبناک از مشکلات و معایب این روش می‌باشد. روش سوم، یک روش نسبتاً ساده می‌باشد که به روش گام به گام^۴ معروف است. در این روش، زاویه‌ی شروع شکست برای قطعه با ترک اولیه توسط معیارهای متداول مکانیک شکست

رشد ترک در قطعات سنگی داشته باشد.

روش گام به گام برای تخمین مسیر رشد ترک

همانطور که در قسمت مقدمه اشاره شد، روش گام به گام یکی از روش‌های متداول برای تخمین مسیر رشد ترک در مواد سنگی، است و هدف از این مقاله، بهبود دقت نتایج این روش می‌باشد. در این روش، زاویه‌ی شروع شکست برای قطعه‌ی ترک‌دار در هر مرحله توسط یکی از معیارهای شکست محاسبه می‌شود. از آنجا که مواد سنگی، همانند سایر مواد شبه ترد، در برابر بارهای کششی ضعیف بوده و عموماً شکست در آن‌ها در راستایی اتفاق می‌افتد که بیشینه تنش کششی اصلی، به اندازه بحرانی خود، یعنی استحکام کششی ماده (f_t)، برسد، از معیار بیشینه تنش محیطی (MTS) برای تخمین زاویه‌ی شروع شکست در مواد سنگی استفاده می‌شود [۱۶]. معیار بیشینه تنش محیطی (MTS) که توسط اردوگان و سیه [۵] ارائه شده است، بیان می‌دارد که ترک در راستای بیشینه مقدار تنش محیطی رشد می‌کند. همچنین رشد ترک زمانی آغاز می‌شود که مقدار تنش محیطی در راستای بیشینه‌ی خود و در فاصله مشخصی از نوک ترک (r_c) به حد بحرانی خود ($\sigma_{\theta\theta c}$) برسد. بنابراین، برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شروع شکست نیاز به مؤلفه‌ی تنش محیطی ($\sigma_{\theta\theta}$) در اطراف ترک می‌باشد. برای این منظور می‌توان از بسط سری ویلیامز [۱۷] که برای تنش‌های الاستیک اطراف ترک ارائه شده است، استفاده کرد:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \\ & \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \theta \end{aligned} \right\} + \quad (1)$$

$$- \frac{n}{2} B_n r^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \theta - \\ & \left(\frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \theta \end{aligned} \right\}$$

که در این رابطه، r و θ مختصات قطبی نوک ترک می‌باشند. همچنین A_n و B_n ضرایب مربوط به جمله‌ی n ام می‌باشند که توسط تحلیل اجزا محدود قابل محاسبه هستند. بر اساس معیار MTS رشد ترک در زاویه‌ای رخ می‌دهد که مقدار تنش محیطی بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

همانند معیار بیشترین تنش محیطی (MTS) [۵]، معیار کمترین چگالی انرژی کرنشی^۶ ((SED)) [۶]، معیار بیشترین نرخ آزاد سازی انرژی^۷ [۷] محاسبه شده و سپس یک ترک کوچک در راستای محاسبه شده به قطعه اضافه می‌شود. در گام بعدی، زاویه شروع شکست مربوط به قطعه با طول ترک جدید، محاسبه شده و این بار به قطعه‌ی جدید، ترکی در همان راستای به دست آمده، اضافه می‌گردد. این روند تا شکست نهایی قطعه ادامه پیدا می‌کند. مشکل اساسی روش سوم، عدم دقت معیارهای شکست در محاسبه‌ی زاویه‌ی شروع شکست می‌باشد که باید به نحوی این نکته را در نظر گرفت. در مورد روش‌های اول و دوم می‌توان به تحقیقاتی که لین و همکارانش [۸]، جیان و سایچینگ [۹]، سانگ و همکارانش [۱۰]، ژو و یوان [۱۱] و لنس و همکارانش [۱۲] اشاره نمود. در مورد روش سوم، تحقیقات کمتری نسبت به دو روش دیگر صورت گرفته و تنها می‌توان به کارهای علیها و همکارانش [۱۳]، علیها و رضایی [۱۴] و زیداکیس و همکارانش [۱۵] اشاره کرد. هدف از این مقاله، ارائه روشی بر مبنای روش گام به گام که ساده‌تر نسبت به دو روش دیگر است، می‌باشد. در واقع، هدف از این مقاله، بهبود روش سوم برای پیش‌بینی دقیق‌تر مسیر رشد ترک در مواد سنگی می‌باشد. در روش پیشنهادی از مبانی معیار بیشینه تنش محیطی برای تخمین زاویه شروع شکست استفاده خواهد شد. دلیل انتخاب این معیار نسبت به سایر معیارهای متداول مکانیک شکست، همخوانی معیار MTS با خواص ذاتی سنگ که استحکام کششی نسبتاً ضعیفی دارد، می‌باشد. برای بهبود دقت نتایج معیار MTS، اثرات جملات مرتبه بالاتر از بسط سری ویلیامز مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای ارزیابی روش پیشنهادی، از نتایج آزمایشگاهی مربوط به قطعات سنگ آهک گایتینگ^۸ که توسط علیها و همکارانش [۱۳] انجام شده بود، استفاده می‌شود. نتایج ارزیابی‌ها نشان می‌دهد که اولاً جملات مرتبه بالاتر تأثیر به‌سزایی در بهبود تخمین مسیر رشد ترک دارند، و ثانیاً روش پیشنهادی با در نظر گرفتن سه جمله از بسط سری ویلیامز، می‌تواند تخمین مناسبی‌تری از مسیر

که در این رابطه پارامتر T با ضریب A_2 به صورت $T=4A_2$ ارتباط دارد. این رابطه قبلاً توسط اسمیت و همکارانش [۱۸] ارائه شده بود. آن‌ها با در نظر گرفتن جمله دوم از بسط سری ویلیامز، معیار MTS را بهبود دادند و معیاری تحت عنوان معیار بیشینه تنش تعمیم یافته^۹ (GMTS) ارائه کردند.

اخیراً، آیت‌الهی و سیستانی‌نیا [۱۹] نشان دادند که جمله‌ی سوم از بسط سری ویلیامز نیز در بهبود نتایج مؤثر بوده و معیاری تحت عنوان معیار بیشینه تنش محیطی اصلاح شده^{۱۰} (MMTS) ارائه نمودند. بنابراین، با در نظر گرفتن سه جمله در هر بسط سری از رابطه (۱)، معادله‌ای که از رابطه (۲) برای محاسبه‌ی زاویه‌ی شروع شکست به دست می‌آید، به صورت زیر می‌باشد:

$$-\frac{3}{8} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_c}} (\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{3\theta_0}{2}) + T(\sin 2\theta_0) - \frac{15}{8} A_3 \sqrt{r_c} (\sin \frac{\theta_0}{2} - \sin \frac{5\theta_0}{2}) + \frac{3}{8} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_c}} (\cos \frac{\theta_0}{2} + 3 \cos \frac{3\theta_0}{2}) - \frac{15}{8} B_3 \sqrt{r_c} (\cos \frac{\theta_0}{2} - 5 \cos \frac{5\theta_0}{2}) = 0 \quad (5)$$

که در این رابطه ضرایب A_3 و B_3 ضرایب جملات سوم بسط سری ویلیامز می‌باشند.

معمولاً برای سادگی کار و افزایش قابلیت استفاده از روابط تنش، ضرایب جملات بسط سری ویلیامز را به صورت ضرایب بی‌بعد K_I^* ، K_{II}^* ، T^* ، A_3^* و B_3^* محاسبه و بیان می‌کنند. نحوه‌ی بی‌بعد سازی این ضرایب در روابط (۶) تا (۱۰) آورده شده است:

$$K_I = \frac{P}{Rt} \sqrt{2\pi R} K_I^* \quad (6)$$

$$K_{II} = \frac{P}{Rt} \sqrt{2\pi R} K_{II}^* \quad (7)$$

$$T = \frac{4P}{Rt} T^* \quad (8)$$

$$A_3 = \frac{P}{Rt} \frac{1}{\sqrt{R}} A_3^* \quad (9)$$

$$B_3 = \frac{P}{Rt} \frac{1}{\sqrt{R}} B_3^* \quad (10)$$

در این روابط R بُعد نامی قطعه (همانند شعاع در قطعات

بنابراین با مشتق‌گیری از رابطه (۱) و برابر صفر قرار دادن آن می‌توان زاویه‌ی شروع رشد ترک (θ_0) را محاسبه نمود:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

البته از ریشه‌های معادله (۲)، مقداری از (θ_0) قابل قبول است که مشتق دوم رابطه (۱) را منفی کند، تا شرط بیشینه بودن تنش محیطی را ارضا نماید.

چنانچه جمله‌ی اول از بسط سری تنش (رابطه ۱) در نظر گرفته شود و در رابطه (۲) جاگذاری گردد، رابطه زیر برای محاسبه زاویه رشد ترک حاصل می‌شود:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (3)$$

که در این رابطه K_I و K_{II} به ترتیب برابر با ضرایب شدت تنش در مود I و II بوده و با ضرایب A_1 و B_1 در رابطه (۱)، به صورت $A_1 = K_I / \sqrt{2\pi}$ و $B_1 = -K_{II} / \sqrt{2\pi}$ ارتباط دارند. رابطه (۳) همان رابطه‌ای است که اردوگان و سیه [۵] در معیار MTS کلاسیک ارائه نمودند.

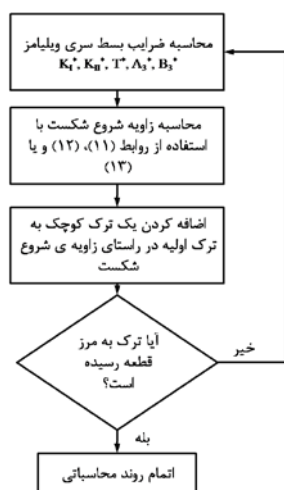
همانطور که در رابطه‌ی (۱) ملاحظه می‌شود، در جمله‌ی اول رابطه‌ی مربوط به تنش محیطی، ترم $r^{-0.5}$ ظاهر شده است. لذا در نزدیکی نوک ترک، که مقدار r به سمت صفر میل می‌کند، برای به دست آوردن تنش محیطی تنها به جمله اول که دارای ترم غالب $r^{-0.5}$ می‌باشد، کافی است. در مواد شبه ترد بر اثر بارگذاری، یک ناحیه‌ی تخریب در نوک ترک به وجود می‌آید که اندازه‌ی این ناحیه نسبتاً بزرگ است. بنابراین فاصله بحرانی که به ناحیه‌ی تخریب وابسته است، در مواد سنگی نسبتاً بزرگ بوده و برای تخمین دقیق‌تر رفتار شکست مواد سنگی، بهتر است تا جملات مرتبه بالاتر از بسط تنش در نظر گرفته شود. چنانچه دو جمله‌ی اول از هر سری رابطه (۱)، در رابطه (۲) وارد شود، معادله‌ی زیر برای تخمین زاویه‌ی شروع شکست به دست می‌آید:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16T}{3} \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (4)$$

$$r_c = \left[\frac{f_t \sqrt{2\pi} \pm \sqrt{2\pi f_t^2 - 12 \frac{A_3^* K_c^2}{K_I^* R}}}{6 \frac{A_3^* K_c}{K_I^* R}} \right]^2 \quad (14)$$

در این رابطه K_C برابر مقدار چقرمگی شکست ماده و f_t برابر مقدار استحکام کششی ماده می‌باشند. همچنین ضرایب K_I^* و A_3^* برای حالت مود I خالص می‌باشد.

حال با داشتن، ضرایب بسط سری ویلیامز و مقدار r_c می‌توان زاویه‌ی شروع شکست را در هر مرحله از روش گام به گام توسط یکی از روابط (۱۱) تا (۱۳) محاسبه نمود. برای درک بهتر از روش گام به گام، شکل فلوجارتی از این روش را نشان می‌دهد. همچنین شماتیکی از روش گام به گام در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: فلوجارتی از روش گام به گام

پر واضح است که مقدار r_c زمانی لازم است که از روابط مربوط به معیارهای GMTS و MMTS استفاده شود. نکته حائز اهمیت در این روش این است که اندازه‌ی بار شکست در هیچکدام از روابط (۱۱) تا (۱۳) مورد نیاز نیست و می‌توان مسیر رشد ترک را مستقل از بار وارده پیش‌بینی نمود. این نکته یکی از مزایای روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها می‌باشد. در قسمت بعدی مسیر رشد ترک قطعات دیسکی شکل از جنس سنگ آهک گایتینگ با استفاده از روش گام به گام تخمین زده خواهد شد.

گرد و یا عرض در نمونه‌های مستطیلی)، ضخامت و P بار وارده می‌باشند. با جاگذاری مقادیر بی‌بعد در روابط (۳)، (۴) و (۵)، فرم نهایی معادلات مربوط به معیارهای GMTS، MTS و MMTS را می‌توان برای محاسبه زوایای شروع شکست، به ترتیب، همانند روابط (۱۱) تا (۱۳)، به دست آورد:

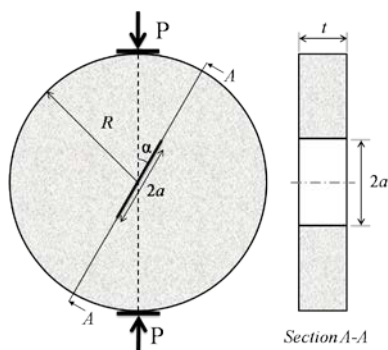
$$K_I^* \sin \theta_0 + K_{II}^* (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (11)$$

$$K_I^* \sin \theta_0 + K_{II}^* (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{64T^*}{3} \sqrt{\frac{r_c}{R}} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (12)$$

$$K_I^* \left(\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{3\theta_0}{2} \right) + \sqrt{\frac{r_c}{R}} (\sin 2\theta_0) - \frac{15}{8} A_3^* \frac{r_c}{R} \left(\sin \frac{\theta_0}{2} - \sin \frac{5\theta_0}{2} \right) + K_{II}^* \left(\cos \frac{\theta_0}{2} + 3 \cos \frac{3\theta_0}{2} \right) - \frac{r_c}{R} B_3^* \left(\cos \frac{\theta_0}{2} - 5 \cos \frac{5\theta_0}{2} \right) = 0 \quad (13)$$

همانطور که در رابطه (۱۱) مشاهده می‌شود، در معیار MTS، زاویه‌ی رشد ترک (θ_0) تنها به نسبت ضرایب شدت تنش‌ها و یا به عبارت دیگر تنها به مود بارگذاری بستگی دارد و از مواردی همچون اندازه‌ی بار وارده بر نمونه آزمایشگاهی، ابعاد نمونه و همچنین جنس قطعه مستقل می‌باشد. اما در روابط مربوط به معیارهای GMTS و MMTS (روابط ۱۲ و ۱۳)، به علت وجود پارامتر r_c ، علاوه بر مود بارگذاری به جنس ماده و ابعاد قطعه نیز وابستگی خواهد داشت. برای استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) باید مقدار r_c که می‌تواند معادل الاستیک اندازه‌ی ناحیه‌ی تخریب در نوک ترک باشد [۲۰]، را دانست. برای محاسبه‌ی r_c روابط مختلفی در مراجع وجود دارد که آیت‌اللهی و اکبردوست [۲۱] به آن‌ها پرداخته‌اند و برای محاسبه‌ی دقیق‌تر r_c رابطه زیر را ارائه نموده‌اند:

پیچیدگی‌های خاص خود را دارد و در حوزه اهداف این مقاله نمی‌باشد. هرچند بار شکست برای تخمین مسیر رشد ترک توسط روش گام به گام نیازی نیست، اما برای کامل بوده اطلاعات آزمایش‌ها، میانگین بار شکست برای هر نمونه در جدول (۱) آورده شده است.



شکل ۲: شماتیکی از نمونه‌ی CSCBD

جدول ۱: ابعاد و بار شکست نمونه‌های سنگی [۱۳].

R (mm)	t (mm)	a (mm)	α ($^{\circ}$)	P_f (N)
۵۰	۴۰	۱۵	۰	۵۲۶۱
۵۰	۴۰	۱۵	۱۰/۵	۵۳۰۰
۵۰	۴۰	۱۵	۲۷	۵۸۸۰

برای تخمین مسیر رشد ترک در نمونه‌های آزمایش شده، در گام اول باید ضرایب بی‌بعد K_I^* ، K_{II}^* ، T^* ، A_3^* و B_3^* را محاسبه نمود. پرواضح است که برای معیار MTS فقط دو ضریب اول و برای معیار GMTS، علاوه بر دو ضریب اول، ضریب T^* نیز باید محاسبه شود و تمامی ضرایب زمانی که زاویه‌ی شروع شکست از طریق معیار MMTS محاسبه می‌گردد، لازم است. سه ضریب K_I^* ، K_{II}^* و T^* را می‌توان به صورت مستقیم از نرم‌افزار المان محدود آباکوس محاسبه نمود، اما برای دو ضریب آخر باید از روش دیگری استفاده کرد. در تحقیق حاضر، تمامی ضرایب از روش اجزا محدود فرامعین^{۱۲} (FEOD) که توسط آیت‌اللهی و نجاتی [۲۲] ارائه شده و قادر است ضرایب جملات مرتبه بالاتر از بسط سری ویلیامز را محاسبه نماید، به دست می‌آیند. در این روش، ابتدا مؤلفه‌های جابجایی برای چند گره از اطراف ترک، با استفاده از روش اجزا محدود محاسبه می‌شود. سپس با جاگذاری مقادیر جابجایی



شکل ۱: شماتیکی از روش گام به گام

بحث و نتایج

برای ارزیابی روش پیشنهادی و اینکه اثرات جملات مرتبه بالاتر در تخمین مسیر رشد ترک به چه صورت است، از نتایج آزمایشگاهی بر روی سنگ آهک گایتینگ استفاده می‌شود. این آزمایش‌ها را علی‌ها و همکارانش [۱۳] برای مود I خالص، مود II خالص و چند مود ترکیبی گزارش کرده‌اند و مسیر رشد ترک برای هر نمونه را، ارائه نموده‌اند. نمونه‌های آزمایش شده، قطعات دایره‌ای شکل با ترک مرکزی مستقیم^{۱۱} می‌باشند که به اختصار به اینگونه قطعات CSCBD گفته می‌شود. شکل ۳ شماتیکی از این قطعه را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، بارگذاری به صورت فشار در راستای قطر می‌باشد. با قرار دادن راستای بار در راستای ترک، مود I خالص ایجاد می‌شود و با تغییر زاویه‌ی راستای بار نسبت به راستای ترک I می‌توان شرایط بارگذاری مود ترکیبی به وجود آورد. متناسب با نسبت نصف طول ترک به شعاع قطعه (یعنی a/R) در یک زاویه‌ی ترک مشخص، لبه‌های ترک بدون بازشدگی و یا فشردگی به روی هم می‌لغزند و شرایط بارگذاری مود II خالص را به وجود می‌آورند. در بین حالت‌های گزارش شده در مرجع [۱۳]، فقط سه حالت در مقاله‌ی حاضر مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول (۱)، ابعاد قطعات آزمایش شده و همچنین زوایای ترک مربوط به سه حالت مورد بررسی، را بیان می‌کند. لازم به ذکر است که چنانچه زاویه ترک بیشتر از 27° گردد، لبه‌های ترک به هم فشرده می‌شوند و حالت بارگذاری از حالت کشش-برش به حالت فشار-برش تبدیل می‌شود [۱۳]. تخمین بررسی مسیر رشد ترک در حالت فشار-برش نیز

وارد گردد. همچنین برای تمامی شرایط بارگذاری از یک عدد ثابت برای r_c استفاده شود. هر چند با نزدیک شدن ترک به مرز خارجی قطعه، پیش‌بینی می‌شود که اندازه r_c کمتر شود [۲۴]، اما برای سادگی کار، مقدار آن ثابت فرض می‌شود.

پس از محاسبه ضرایب بی‌بعد و مقدار r_c می‌توان زاویه شروع شکست قطعات را در گام اول محاسبه نمود. جدول ۳ بیان‌گر زوایای شروع شکست برای قطعه با طول ترک اولیه می‌باشد که از طریق سه معیار MTS، GMTS و MMTS محاسبه شده‌اند.

جدول ۳: زوایای شروع شکست برای قطعه با طول ترک اولیه

α (°)	MTS	GMTS	MMTS
۰	۰°	۰°	۰°
۱۰/۵	۲۹°	۱۶°	۱۶°
۲۷	۷۰°	۵۳°	۴۴°

پس از محاسبه زاویه شروع شکست، ترکی در راستای این زاویه به ترک اولیه اضافه می‌شود. سپس ضرایب بی‌بعد برای این ترک جدید محاسبه شده و زاویه شروع شکست جدید محاسبه می‌شود. این روند تا شکست نهایی قطعه ادامه دارد. در شکل ۳ مراحل اجرا شده، برای قطعه CSCBD در حالت مود II خالص به صورت شماتیک نشان داده شده است. همچنین شکل ۴ مسیر رشد ترک که از سه معیار MTS، GMTS و MMTS پیش‌بینی شده است، به همراه نتایج آزمایشگاهی برای هر سه قطعه را نشان می‌دهد.

همانطور که شکل ۴ نشان می‌دهد، در حالت بارگذاری مود I خالص تفاوتی بین سه معیار ملاحظه نمی‌شود و هر سه معیار مسیر رشد ترک را در راستای ترک اولیه پیش‌بینی می‌کنند که این مطلب در نتایج آزمایشگاهی نیز مشاهده می‌شود. در حالت بارگذاری مود ترکیبی دو معیار GMTS و MMTS به دلیل در نظر گرفتن اثرات جملات مرتبه بالاتر، دقت بیشتری نسبت به معیار MTS برای تخمین مسیر رشد ترک سنگ موردنظر دارند. تفاوت بین پیش‌بینی سه معیار در حالت مود II خالص، بیشتر به چشم می‌خورد و همانطور که در

محاسبه شده و مختصات گره‌ها در روابط حوزه جابجایی که توسط ویلیامز [۱۷] ارائه شده است، دسته معادلاتی حاصل می‌شود که ضرایب بسط سری ویلیامز در آن‌ها مجهول می‌باشند. با حل این دسته معادلات که تعداد آن‌ها بیشتر از مجهول‌ها می‌باشند (دسته معادلات فرامعین)، ضرایب بسط سری ویلیامز محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از روابط (۶) تا (۱۰)، ضرایب بی‌بعد K_I^* ، K_{II}^* ، T^* ، A_3^* و B_3^* به دست می‌آیند. این ضرایب بی‌بعد برای نمونه‌ی CSCBD به طور نسبتاً کامل توسط اکبردوست و آیت‌اللهی [۲۳] محاسبه و گزارش شده است. برای نمونه‌های آزمایش شده که دارای $a/R=0.3$ هستند، این ضرایب بی‌بعد از مرجع [۲۳] استخراج شده و در جدول (۲) آورده شده است. البته این ضرایب فقط برای گام اول از روش پیشنهادی کاربرد دارند و در گام‌های بعدی باید برای قطعه با طول ترک جدید این ضرایب مجدداً، با استفاده از روش FEOD محاسبه شوند.

جدول ۲: ضرایب بی‌بعد برای نمونه‌های CSCBD با نسبت $a/R=0.3$ [۲۳]

α (°)	K_I^*	K_{II}^*	T^*	A_3^*	B_3^*
۰	۰/۱۴۰	۰	-۰/۳۶۳	۰/۱۱	۰
۱۰/۵	۰/۱۱۶	۰/۱۰۹	-۰/۳۲۳	۰/۰۶۴	۰/۱۴۵
۲۷	۰/۰۰۱	۰/۲۲۹	-۰/۱۴۸	-۰/۰۹۹	۰/۲۳۰

پارامتر دیگری که برای استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) لازم است، مقدار r_c می‌باشد. برای محاسبه مقدار r_c از رابطه (۱۴) استفاده می‌شود. مقدار چقرمگی شکست K_c در رابطه (۱۴)، با جاگذاری بار شکست حالت بارگذاری مود I در رابطه (۶)، برابر با $0.207 \text{ MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ محاسبه می‌شود. مقدار استحکام کششی نیز برابر با 2 MPa مطابق آنچه در مرجع [۱۳] گزارش شده است، در نظر گرفته می‌شود. با وارد کردن پارامترهای مورد نیاز در رابطه (۱۴) مقدار r_c برای نمونه‌های آزمایشگاهی برابر با $۲/۰۵$ میلی‌متر به دست می‌آید. در تحقیق حاضر پیشنهاد می‌شود که مقدار r_c برای تمامی گام‌ها ثابت فرض شود و تا شکست نهایی همان مقدار $۲/۰۵$ میلی‌متر در روابط

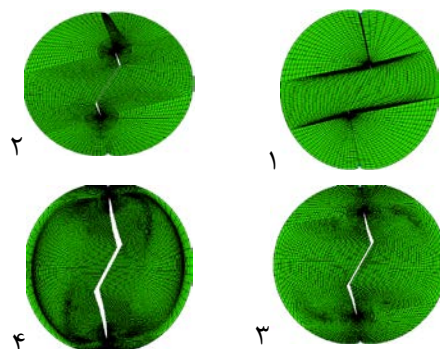
نکته‌ی دیگری که می‌توان از روش گام به گام و شکل ۴ استخراج نمود این است که پس از انجام چند مرحله، زاویه شروع شکست به سمت صفر میل می‌کند (به شماتیک شکل ۱ و زاویای θ_0^1 توجه شود). این نکته بدین معنی است که پس از طی چند گام، ترک در راستای جدید خود رشد می‌کند و رشد ترک از حالت بارگذاری مود ترکیبی به سمت رشد در حالت بارگذاری I خالص سوق پیدا می‌کند.

در اینجا ذکر یک نکته الزامیست که در حالت کلی و در شرایط بارگذاری مود ترکیبی کشش-برش (به ویژه در حالت مود II خالص)، رشد ترک ممکن است در دو راستا اتفاق بیفتد: (۱) راستای بیشینه برش، (۲) راستای بیشینه کشش. همانطور که اشاره شد، مواد سنگی استحکام کششی نسبتاً ضعیفی دارند و عموماً رشد ترک در آن‌ها در راستایی که بیشینه تنش کششی وجود دارد رخ می‌دهد [۱۶]. البته برخی محققین با استفاده از هندسه‌های خاص توانسته‌اند، ترک را در شرایط بارگذاری برش خالص (مود II خالص) در راستای اولیه‌ی آن (یعنی راستای بیشینه برش) رشد بدهند [۲۵-۲۶]. روش پیشنهادی در مقاله حاضر، بر اساس رشد شکست در راستای بیشینه تنش اصلی کششی استوار است و در نتیجه نمی‌توان از آن برای حالت اول از رشد ترک (در راستای بیشینه برش) استفاده کرد. اما با توجه به کثرت مواردی از قطعات سنگی ترک‌دار که ترک در آن‌ها در راستای بیشینه تنش کششی رشد می‌کند، روش پیشنهادی کارایی زیادی داشته و می‌تواند تخمین مناسبی از رشد ترک را پیش‌بینی نماید.

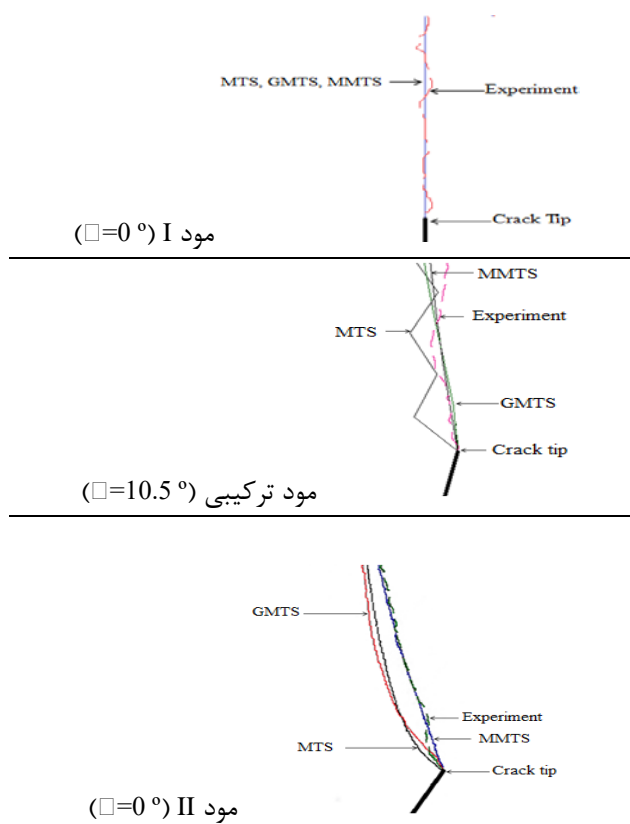
نتیجه‌گیری

بررسی و تخمین مسیر رشد ترک در قطعات سنگی از جمله مسایل مهم برای محققین و مهندسين عمران و معدن می‌باشد. از اینرو، تاکنون روابط و روش‌های متعددی برای تخمین شرایط شکست و همچنین تخمین مسیر رشد ترک برای قطعات سنگی ارائه شده است. هدف از این مقاله نیز بیان یک روش ساده و نسبتاً دقیق برای تخمین مسیر رشد ترک در قطعات سنگی می‌باشد. روش پیشنهادی یک روش گام به گام

قسمت سوم شکل ۴ مشاهده می‌شود، معیار MMTS تخمین دقیق‌تری نسبت به دو معیار دیگر دارد. بنابراین، می‌توان گفت که روش پیشنهادی با در نظر گرفتن سه جمله از بسط سری ویلیامز، تخمین مناسبی از مسیر رشد ترک در مواد سنگی خواهد داشت.



شکل ۳: مراحل رشد ترک به روش گام به گام با استفاده از معیار MMTS در حالت مود II خالص



شکل ۴: مقایسه مسیر رشد ترک تخمین زده شده توسط معیارهای MMTS، GMTS، MTS با نتایج آزمایشگاهی [۱۳]

MTS، *GMTS* و *MMTS* با نتایج به دست آمده از آزمایش می‌توان نتیجه گرفت که اولاً روش پیشنهادی با در نظر گرفتن به جمله از بسط سری ویلیامز (یعنی معیار *MMTS*) قادر است تا تخمین دقیق‌تری از مسیر رشد ترک در قطعه‌ی مورد نظر نسبت به دو معیار دیگر، داشته باشد. ثانیاً، مود شکست قطعه پس از اینکه ترک مقداری رشد کرد، از حالت مود ترکیبی به حالت مود *I* خالص تغییر می‌کند و رشد ترک در راستای ترک جدید اتفاق می‌افتد.

و مرحله‌ای است که در هر مرحله زاویه‌ی شروع شکست با توجه به مبانی معیار بیشینه تنش محیطی (*MTS*) محاسبه می‌شود. در این مقاله، برای محاسبه تنش محیطی در اطراف ترک، علاوه بر جملات تکین (همانند معیار *MTS* کلاسیک)، جملات دوم و سوم از بسط سری ویلیامز (معیارهای *GMTS* و *MMTS*) نیز در نظر گرفته شده است. به منظور ارزیابی روش پیشنهادی، از نتایج آزمایشگاهی که بر روی نمونه‌های دیسکی شکل با ترک مرکزی (قطعه‌ی *CSCBD*) صورت گرفته بود، استفاده شد. با مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از معیارهای

۴- مراجع

[4] Bazant, Z.P. (1982). Crack Band Model for Fracture of Geomaterials. in: Z. Eisenstein (Ed.) 4th International Conference of Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, p:1137-1152.

[5] Erdogan, F. & G.C. Sih (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Fluids Engineering*, 85: 519-525.

[6] Sih, G.C. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10: 305-321.

[7] Hussain, M.A, Pu, S.L & Underwood, J. (1974). Strain

[12] Lens, N.L., Bittencourt, E., & d'Avila, V.M.R. (2009). Constitutive models for cohesive zones in mixed-mode fracture of plain concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, 76: 2281-2297.

[13] Aliha, M.R.M., Ayatollahi, M.R., Smith, D.J. & Pavier, M.J. (2010). Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading, *engineering fracture mechanics*, 77:2200-2212.

[14] Aliha, M.R.M. & Rezaei, M. (2011). Experimental and theoretical study of fracture paths in brittle cracked materials subjected to pure mode II loading, *Applied Mechanics and Materials*, 710:159-164.

[15] Xeidakis, G.S., et al. (1997). Trajectories of unstably growing cracks in mixed mode I-II loading of marble beams. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 30: 19-33.

[16] Bazant, Z.P., & Pfeiffer, P.A. (1986). Shear fracture tests of concrete. *Materials and Structures*, 19:

[1] Al-Shayea, N.A. (2005). Crack propagation trajectories for rocks under mixed mode I-II fracture. *Engineering Geology*, 81: 84-97.

[2] Ayatollahi, M.R. & Aliha, M.R.M. (2008). On the use of Brazilian disc specimen for calculating mixed mode I-II fracture toughness of rock materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75: 4631-4641.

[3] Ayatollahi, M.R., Hosseinpour, G.R. & Aliha M.R.M. (2010). Using a new tensile-shear cracked specimen for investigating fracture behavior of rock materials. *Proceedings of ICEM2010 conference, Malaysia*.

e

rgy release rate for a crack under combined mode I and mode II. *Fracture Analysis, ASTM STP 560: 2-28*.

[8] Lin, Q., Fakhimi, A., Haggerty, M. & Labuz, J.F.(2009). Initiation of tensile and mixed-mode fracture in sandstone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46: 489-497.

[9] Jian-An, H. & Sijing, W. (1985). An experimental investigation concerning the comprehensive fracture toughness of some brittle rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 22: 99-104.

[10] Song, L., Huang, S.M., & Yang, S.C. (2004). Experimental investigation on criterion of three-dimensional mixed-mode fracture for concrete. *Cement and Concrete Research*, 34: 913-916.

[11] Xu, Y., & Yuan, H. (2011). Applications of normal stress dominated cohesive zone models for mixed-mode crack simulation based on extended finite element methods, *Engineering Fracture Mechanics*, 78: 544-558.

- [22] Ayatollahi, M.R. & Nejati, M. (2011). An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 34: 159-176.
- [23] Akbardoost, J. & Ayatollahi, M.R. (2014). Experimental analysis of mixed mode crack propagation in brittle rocks: the effect of non-singular terms, *Engineering Fracture Mechanics*, 129: 77-89.
- [24] Duan, K., Hu, X. & Wittmann, F.H. (2007). Size effect on specific fracture energy of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:87-96.
- [25] Rao, Q., Sun, Z., Stephansson, O., Li, C. & Stillborg, B. (2003). Shear fracture (Mode II) of brittle rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 40:355-375.
- [26] Backers, T., Stephansson, O. & Rybacki, E. (2002). Rock fracture toughness testing in Mode II—punch-through shear test. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 39:755-69.
- 111-21.
- [17] Williams, M. L. (1956). On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24: 109-114.
- [18] Smith, D. J., Ayatollahi, M. R., & Pavier, M. J. (2001). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 24: 137-150.
- [19] Ayatollahi, M.R. & Sistaninia, M. (2011). Mode II fracture study of rocks using Brazilian disk specimens. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 48: 819-826.
- [20] Akbardoost, J., Ayatollahi, M.R., Aliha, M.R.M., Pavier, M.J. & Smith, D.J. (2014). Size-dependent fracture behavior of Guiting limestone under mixed mode loading. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 71: 369-380
- [21] Ayatollahi, M.R., & Akbardoost, J. (2012). Size effects on fracture toughness of quasi-brittle materials – A new approach. *Engineering fracture mechanic*, 92: 89-100.

-
- 1 Cohesive element
 - 2 Cohesive zone model
 - 3 Extended finite element method
 - 4 Incremental method
 - 5 Maximum Tangential Stress
 - 6 Minimum strain energy density
 - 7 Maximum energy release rate
 - 8 Guiting limestone
 - 9 Generalized MTS
 - 10 Modified MTS
 - 11 Central straight through cracked Brazilian disk
 - 12 Finite element over-deterministic